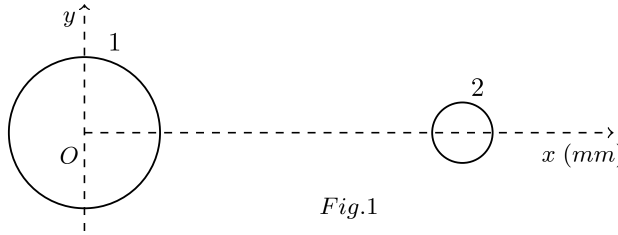
In $Fig.1$, due fili conduttori di sezione circolare, infinitamente lunghi, rettilinei e paralleli, sono perpendicolari al foglio che stai osservando; i due fili sono percorsi dalla stessa corrente elettrica i, uscenti dal foglio per entrambi i conduttori. Il conduttore 1 ha raggio $R = 2$ ed ha l'asse passante per l'origine degli assi cartesiani, Il conduttore 2 ha raggio < 1 ed ha l'asse passante per il punto $(10, 0)$; (a) determina la funzione del campo magnetico $B_a(x)$ per i punti dell'asse x con $0 \leq x \leq R$, (b) determina la funzione del campo magnetico $B_b(x)$ per i punti dell'asse x con $R < x \leq 9$, (c) verifica se la funzione $B(x)$, unione di $B_a(x)$ e $B_b(x)$, è continua e derivabile per $0 \leq x \leq 9$, (d) verifica se $B(x)$ ha un punto di massimo relativo, (e) verifica se esiste almeno un valore di $x \in [0, 9]$ in cui $B(x)$ si annulla, (f) rappresenta graficamente $B(x)$.

(per campi magnetici paralleli all'asse y, considera $B > 0$ se il verso di $\vec{B}$ è concorde con il semiasse positivo di y)

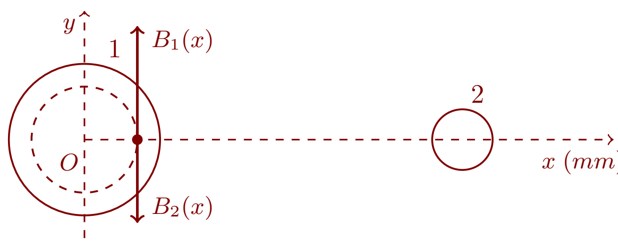


$Fig.1$

SOLUZIONE

Indicando con $B_1(x)$ e $B_2(x)$ i campi magnetici prodotti rispettivamente dal conduttore 1 e dal conduttore 2 nel punto di ascissa x

(a) consideriamo una circonferenza (tratteggiata) di centro $(0, 0)$ e raggio $0 \leq x \leq R$, la corrente i_x concatenata con tale circonferenza è $i_x = \dfrac{i}{\pi R^2} \cdot \pi x^2 = \dfrac{x^2}{R^2}\, i$



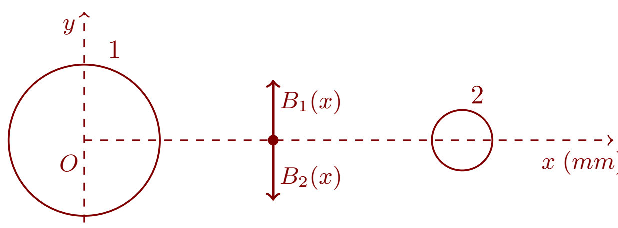
con la legge di Ampére $B_1(x)\, 2\pi x \cdot 10^{-3} = \mu_o i_x \implies$

$$B_1(x) = \frac{\mu_o i \cdot 10^3}{2\pi R^2}\, x \qquad B_2(x) = \frac{\mu_o i \cdot 10^3}{2\pi (10 - x)} \implies B_a(x) = B_1(x) - B_2(x) = \frac{\mu_o i \cdot 10^3}{2\pi} \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{10 - x} \right)$$

(b)

$$B_1(x) = \frac{\mu_o i \cdot 10^3}{2\pi x} \qquad B_2(x) = \frac{\mu_o i \cdot 10^3}{2\pi (10 - x)} \implies$$

$$B_b(x) = B_1(x) - B_2(x) = \frac{\mu_o i \cdot 10^3}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{10 - x} \right)$$



(c) ponendo $k = \dfrac{\mu_o i \cdot 10^3}{2\pi}$

$$B(x) = \begin{cases} k \left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{10 - x} \right) & 0 \leq x \leq 2 \\[2ex] k \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{10 - x} \right) & 2 < x \leq 9 \end{cases}$$

le funzioni $B_a(x)$ e $B_b(x)$ sono continue nei rispettivi domini D_a e D_b, verifichiamo la continuità in $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^+} k\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{10-x}\right)=\frac{3}{8}\,k \qquad B(2)=k\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{10-2}\right)=\frac{3}{8}\,k \implies \text{funzione continua per } x\in D$$

$$B'(x)=\begin{cases} k\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{(10-x)^2}\right) & 0\le x\le 2\\[2ex] k\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(10-x)^2}\right) & 2< x\le 9\end{cases}$$

le funzioni $B_a(x)$ e $B_b(x)$ sono derivabili nei rispettivi domini, verifichiamo la derivabilità in $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} B'_a(x)=\frac{15}{64}\,k \qquad \lim_{x\to 2^+} B'_b(x)=-\frac{17}{64}\,k \implies B(x) \text{ non derivabile in } x=2 \quad \text{(punto angoloso)}$$

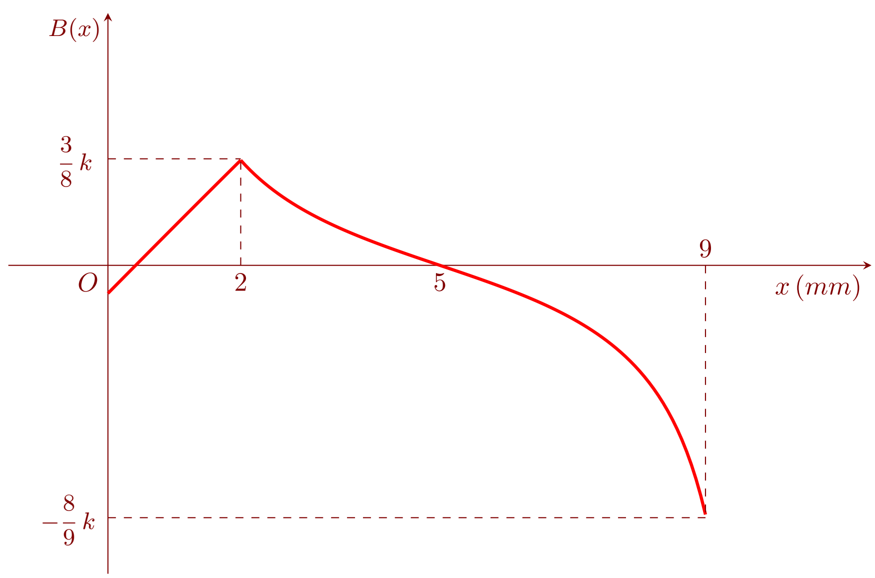
(d) $\quad B'_a(x)>0$ *per* $x\in D_a \implies B_a(x)$ *crescente per* $x\in D_a$

$B'_b(x)<0$ *per* $x\in D_b \implies B_b(x)$ *decrescente per* $x\in D_b \implies$ *in* $x=2$ *Max relativo (anche Max assoluto)*

(e) $\quad$ essendo $B(x)$ continua, $B(2)=\frac{3}{8}\,k>0$ e $B(9)=-\frac{8}{9}\,k<0 \implies B(x)$ esiste almeno un punto all'interno di D_b in cui la funzione si annulla (teorema di Bolzano)

anche semplicemente $B_a(x)=0 \implies x=5-\sqrt{21}$ e $B_b(x)=0 \implies x=5 \implies$ 2 zeri

(f)



...si lascia all'alunno lo studio dettagliato della funzione $B(x)$