Campo magnetico di un filo conduttore, rettilineo ed infinitamente lungo, percorso da corrente elettrica

Un filo conduttore, rettilineo ed infinitamente lungo, percorso da corrente elettrica, crea, nello spazio circostante, linee di campo magnetico che sono delle circonferenze con centri nei punti del filo e giacenti su piani perpendicolari al filo (Fig.1 e Fig.2); ci si può rendere conto di questo distribuendo attorno al filo degli aghi magnetici di prova o spargendo della polvere di ferro su un foglio di carta perpendicolare al filo. Si vuole calcolare l'inensità del vettore $\vec{B}$ in un punto P posto ad una distanza h dal filo; la direzione di $\vec{B}$ è tangente alla linea di campo (circonferenza) ed il suo verso è quello della rotazione dell'avvitamento/svitamento di una lampadina che avanza secondo il verso di i.

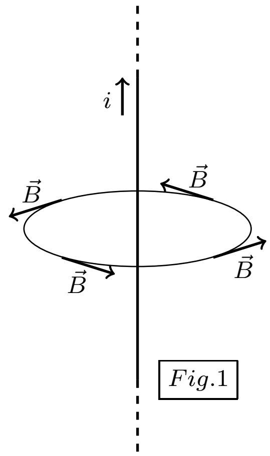

Fig.1

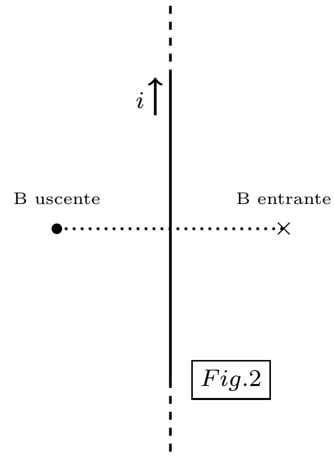

Fig.2

Facendo riferimento alla Fig.3 (filo orizzontale), u_x è il versore avente la direzione del filo ed il verso di i, u_r è il versore avente la direzione di r (congiungente A con il punto P) ed il verso uscente da A, Δx è l'elemento di filo posto nell'ascissa x; per la legge di Laplace si può scrivere

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_o\, i\, \Delta x}{4\,\pi\, r^2}\, u_x \times u_r \quad \Longrightarrow \quad |\Delta\vec{B}| = \Delta B = \frac{\mu_o\, i\, \sin\theta\, \Delta x}{4\,\pi\, r^2} \qquad (con\ |u_x \times u_r| = \sin\theta)$$

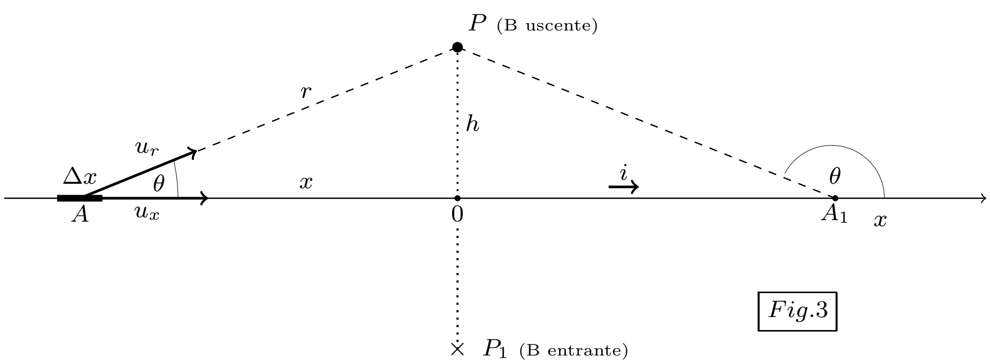

Fig.3

Per le proprietà dei triangoli rettangoli: $h = r\sin\theta \implies \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{\sin^2\theta}{h^2}$ e $\tan\theta = -\dfrac{h}{x} \implies x = -h\cot\theta$

in quanto x e $\cot\theta$ hanno segni opposti (sia in A che in A_1)

$\Delta x = dx = \dfrac{h}{\sin^2\theta}\, d\theta$ e quindi, integrando

$$B = \int_0^{\pi} \frac{\mu_o\, i\, \sin\theta}{4\,\pi}\, \frac{\sin^2\theta}{h^2}\, \frac{h}{\sin^2\theta}\, d\theta = \frac{\mu_o\, i}{4\,\pi\, h} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_o\, i}{4\,\pi\, h}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{\mu_o\, i}{4\,\pi\, h}\,\big[2\big] \implies \boxed{B = \frac{\mu_o\, i}{2\,\pi\, h}}$$