Come considerare un condensatore riempito per metà con un dielettrico?

(antiprof)[♩]

Dopo ripetute, insistenti ed ossessive richieste al riguardo (vedi titolo) da parte di quei pelandroni antipatici dei miei alunni, di seguito una risposta:

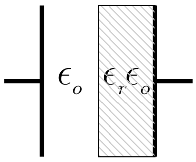

Fig.1

Facendo riferimento all Fig.1, indichiamo con C la capacità del condensatore, con V_o la ddp tra le armature, con A la superficie delle armature, con d la distanza tra le armature, con σ la densità di carica sulle armature, con E_o il campo elettrico senza dielettrico, con E_1 il campo elettrico con il dielettrico.

Essendo

$$E_o = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \tag{1}$$

ed $E_1 = \dfrac{\sigma}{\epsilon_r\epsilon_o}$, si può scrivere $E_o = \epsilon_r E_1$, e quindi [♩♩]

$$\begin{cases} V_o = E_o\dfrac{d}{2} + E_1\dfrac{d}{2} \\ E_o = \epsilon_r E_1 \end{cases} \tag{2}$$

risolvendo la (2) si ha $E_1 = \dfrac{V_o}{(1+\epsilon_r)\dfrac{d}{2}}$ ed $E_o = \epsilon_r E_1 = \dfrac{\epsilon_r V_o}{(1+\epsilon_r)\dfrac{d}{2}}$, per cui, per la (1):

$$\sigma = \frac{\epsilon_r\epsilon_o V_o}{(1+\epsilon_r)\dfrac{d}{2}} \quad . \tag{3}$$

Calcoliamo infine il reciproco di C,

$$\frac{1}{C} = \frac{V_o}{\sigma A} = \frac{V_o}{A}\frac{(1+\epsilon_r)\dfrac{d}{2}}{\epsilon_r\epsilon_o V_o} = \frac{1}{\epsilon_o\epsilon_r\frac{A}{\frac{d}{2}}} + \frac{1}{\epsilon_o\frac{A}{\frac{d}{2}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_o} \tag{4}$$

dove C_1 si può considerare come la capacità della metà del condensatore con il dielettrico e C_o si può considerare come la capacità della metà del condensatore senza dielettrico.

La (4) indica che C equivale ai due condensatori in serie C_o e C_1.

Il condesatore, se viene riempito per metà da un dielettrico, aumenta la sua capacità (rispetto a quella dello stesso condensatore vuoto C_{vuoto}); infatti, dalla (4) si ha $C = \epsilon_o\dfrac{A}{d}\left(\dfrac{2\epsilon_r}{\epsilon_r+1}\right) = C_{vuoto}\left(\dfrac{2\epsilon_r}{\epsilon_r+1}\right)$ essendo $2\epsilon_r = \epsilon_r + \epsilon_r > \epsilon_r + 1$ $(\textit{ricordando che } \epsilon_r > 1) \implies C > C_{vuoto}$

[♩] da **anti***patico* **prof***essore*, oppure da **anti***co* **prof***essore*, oppure da **anti***quato* **prof***essore*, oppure, semplicemente, da **anti prof***essore*

[♩♩] tenendo conto che $V_o = V(\epsilon_o) + V(\epsilon)$