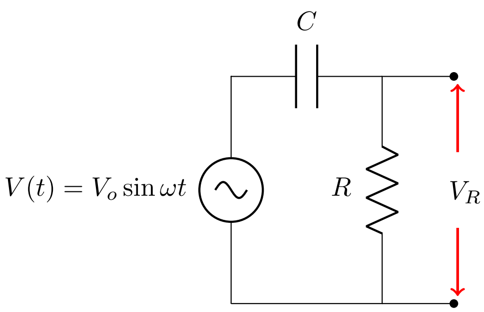
Filtro passa alto e filtro passa basso (punti di flesso)

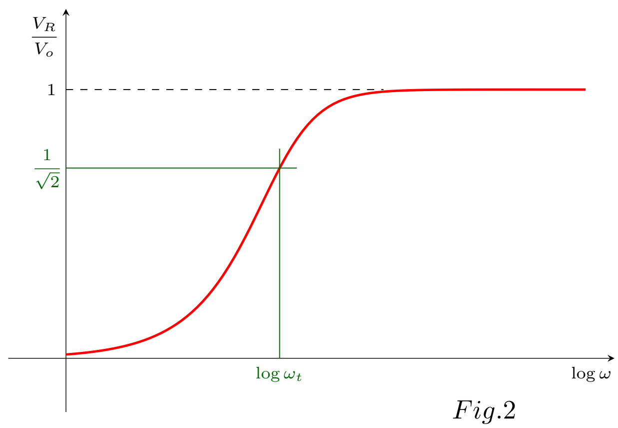
Chiara Cesaro - Carlo Luviner

In $Fig.1$ è rappresentato un semplice circuito che funge da filtro passa alto, attenua le basse frequenze ed influenza poco quelle alte; per rendersene conto basta calcolare il rapporto tra la tensione massima d'uscita V_R (ai capi del resistore) e quella massima d'ingresso V_o (ai capi del generatore di tensione alternata). In $Fig.2$ è rappresentato il grafico di tale rapporto in funzione dalla pulsazione ω (in scala semilogaritmica).

$$V_o = Z \cdot I_o = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega\, C}\right)^2} \cdot I_o \quad ; \quad V_R = R \cdot I_o \qquad \Rightarrow \quad \frac{V_R}{V_o} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega\, C}\right)^2}}$$



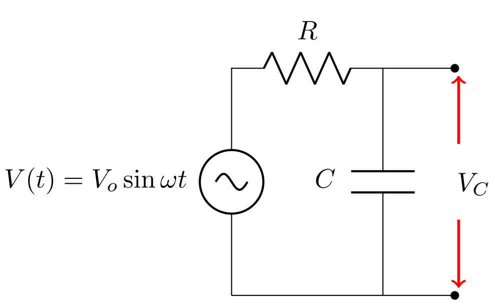
$Fig.1$



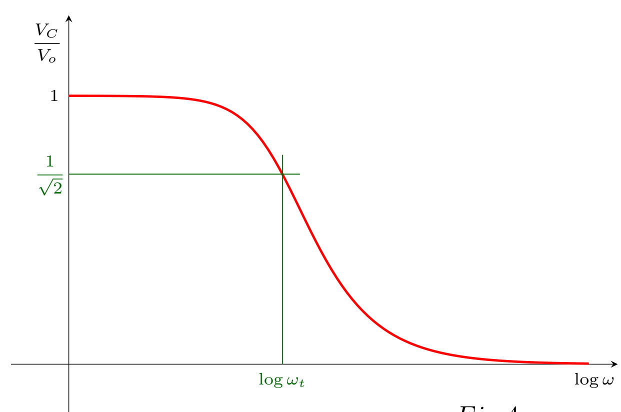
$Fig.2$

In $Fig.3$ è rappresentato un semplice circuito che funge da filtro passa basso, attenua le alte frequenze ed influenza poco quelle basse; per rendersene conto basta calcolare il rapporto tra la tensione massima d'uscita V_C (ai capi del condensatore) e quella massima d'ingresso V_o (ai capi del generatore di tensione alternata). In $Fig.4$ è rappresentato il grafico di tale rapporto in funzione dalla pulsazione ω (in scala semilogaritmica).

$$V_o = Z \cdot I_o = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega\, C}\right)^2} \cdot I_o \quad ; \quad V_C = X_C \cdot I_o \qquad \Rightarrow \quad \frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega\, C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega\, C}\right)^2}}$$



$Fig.3$



$Fig.4$

Caratteristica importante dei filtri è la frequenza di taglio che è la frequenza per cui il rapporto tra la tensione d'uscita e quella d'ingresso è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$; si verifica con semplici calcoli che, per entrambi i filtri, la frequenza di taglio corrisponde alla pulsazione di taglio $\omega_t = \frac{1}{RC}$ (ricordando che $\omega = 2\pi f$, alla pulsazione di taglio corrisponde univocamente una frequenza di taglio).

Poichè in scala semilogaritmica i grafici presentano dei flessi, si vogliono stabilire le relazioni tra le pulsazioni dei flessi e quella di taglio.

Filtro PASSA ALTO: coordinate del flesso, derivata prima nel punto di flesso

$$\frac{V_R}{V_o} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega\, C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2C^2\omega^2}}} \qquad \text{ponendo} \quad h = \frac{1}{R^2C^2} \quad \text{e} \quad \omega = 10^x \implies y = \frac{1}{\sqrt{1 + h\,10^{-2x}}}$$

derivata prima $\quad y' = -\frac{-\,2\,h\,10^{-2x}\,\ln 10}{(1 + h\,10^{-2x})\;2\sqrt{1 + h\,10^{-2x}}} = \frac{h\,10^{-2x}\,\ln 10}{(1 + h\,10^{-2x})^{\frac{3}{2}}}$

derivata seconda $\quad \frac{y''}{h\,\ln 10} = \frac{-\,2\cdot 10^{-2x}\,\ln 10\,\left(1 + h\,10^{-2x}\right)^{\frac{3}{2}} - 10^{-2x}\,\frac{3}{2}\left(1 + h\,10^{-2x}\right)^{\frac{1}{2}} h\,(-2)\cdot 10^{-2x}\ln 10}{(1 + h\,10^{-2x})^3}$

$$= \frac{10^{-2x}\,\ln 10\,\left(1 + h\,10^{-2x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-2 - 2\,h\,10^{-2x} + 3\,h\,10^{-2x}\right)}{(1 + h\,10^{-2x})^3}$$

$$\omega_{f,A}: \quad y'' = 0 \implies -2 + h\,10^{-2x} = 0 \implies 10^{-2x} = \frac{2}{h} \implies \frac{1}{(\omega_{f,A})^2} = 2R^2C^2 \implies \omega_{f,A} = \frac{1}{\sqrt{2}\,RC}$$

$$y(\omega_{f,A}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies F_A\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}RC}\,;\;\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad\qquad y'(\log\omega_{f,A}) = \frac{2\sqrt{3}\,\ln 10}{9} = 0.886$$

Filtro PASSA BASSO: coordinate del flesso, derivata prima nel punto di flesso

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega\, C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega\, C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2C^2\omega^2 + 1}} \qquad \text{ponendo} \quad t = R^2C^2 \quad \text{e} \quad \omega = 10^x \implies y = \frac{1}{\sqrt{t\,10^{2x} + 1}}$$

derivata prima $\quad y' = -\frac{2\,t\,10^{2x}\,\ln 10}{(t\,10^{2x} + 1)\;2\sqrt{t\,10^{2x} + 1}} = -\frac{t\,10^{2x}\,\ln 10}{(t\,10^{2x} + 1)^{\frac{3}{2}}}$

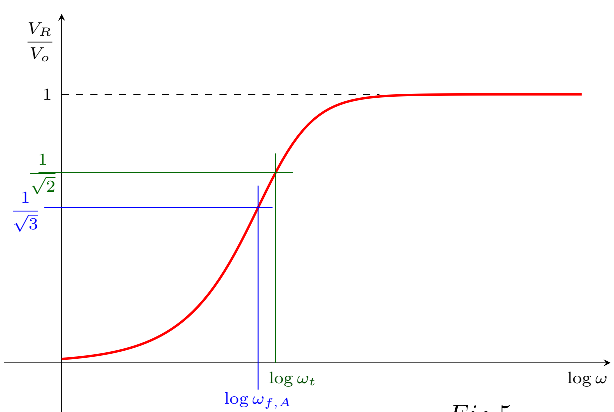
derivata seconda $\quad \dfrac{y''}{t\,\ln 10} = -\dfrac{2\cdot 10^{2x}\,\ln 10\,\left(t\,10^{2x}+1\right)^{\frac{3}{2}} - 10^{2x}\,\dfrac{3}{2}\left(t\,10^{2x}+1\right)^{\frac{1}{2}}\,t\,2\cdot 10^{2x}\ln 10}{\left(t\,10^{2x}+1\right)^{3}}$

$$= -\frac{10^{2x}\,\ln 10\,\left(t\,10^{2x}+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(2\,t\,10^{2x}+2-3\,t\,10^{2x}\right)}{\left(t\,10^{2x}+1\right)^{3}}$$

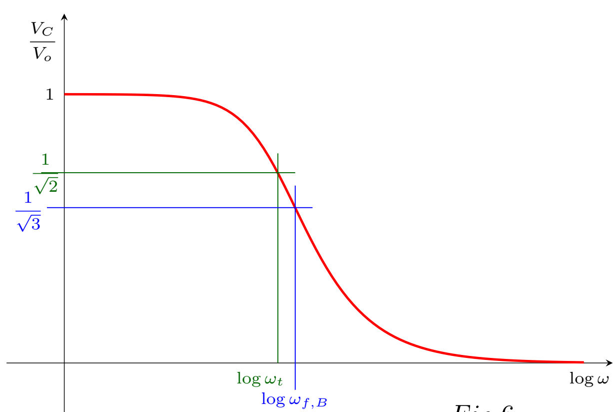
$$\omega_{f,B}: \quad y''=0 \implies 2-t\,10^{2x}=0 \implies 10^{2x}=\frac{2}{t} \implies \omega_{f,B}=\frac{\sqrt{2}}{RC}$$

$$y(\omega_{f,B})=\frac{1}{\sqrt{3}} \implies F_B\left(\log\frac{\sqrt{2}}{RC}\,;\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad\qquad y'(\log\omega_{f,B}) = -\frac{2\sqrt{3}\,\ln 10}{9} = -0.886$$

Riportando i dati calcolati nei grafici si osserva che la pulsazione del punto di flesso del filtro passa alto è minore di quella di taglio ($Fig.5$) mentre la pulsazione del punto di flesso del filtro passa basso è maggiore di quella di taglio ($Fig.6$)



$Fig.5$



$Fig.6$

Per verificare la correttezza dei calcoli si può determinare, per ciascun filtro, l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di flesso, utilizzando l'equazione $y - f(x_F) = f'(x_F)\,(x - x_F)$

per il filtro passa alto si trova: $y - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0.886\left(x - \log\dfrac{1}{\sqrt{2}\,RC}\right)$

per il filtro passa basso si trova: $y - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = -0.886\left(x - \log\dfrac{\sqrt{2}}{RC}\right)$

scegliendo dati numerici per RC uguali per i due filtri si ottengono le $Fig.7$ e $Fig.8$ che evidenziano la compatibilità tra tutti i risultati calcolati.

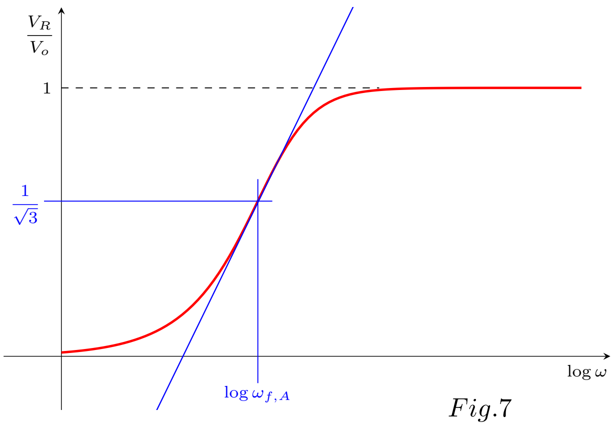


Fig.7

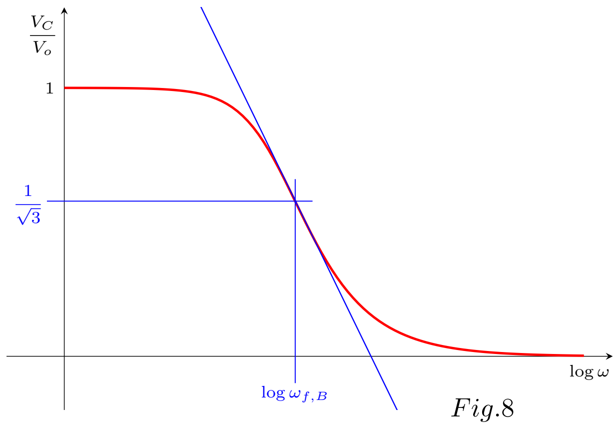


Fig.8

Sovrapponendo i grafici dei due filtri si ritrova che si intersecano alla pulsazione di taglio e si nota che i punti di flesso sono simmetrici rispetto a $x = \log\omega_t$; quest'ultima osservazione può essere verificata calcolando l'ascissa $\overline{x}$ del punto medio dei due flessi

$$\overline{x} = \frac{\log\omega_{f,A} + \log\omega_{f,B}}{2} = \frac{\log\dfrac{1}{\sqrt{2}RC} + \log\dfrac{\sqrt{2}}{RC}}{2} = \frac{\log\dfrac{1}{\sqrt{2}RC}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{RC}}{2} = \frac{\log\dfrac{1}{(RC)^2}}{2} = \frac{2\log\dfrac{1}{RC}}{2} = \log\frac{1}{RC} = \log\omega_t$$

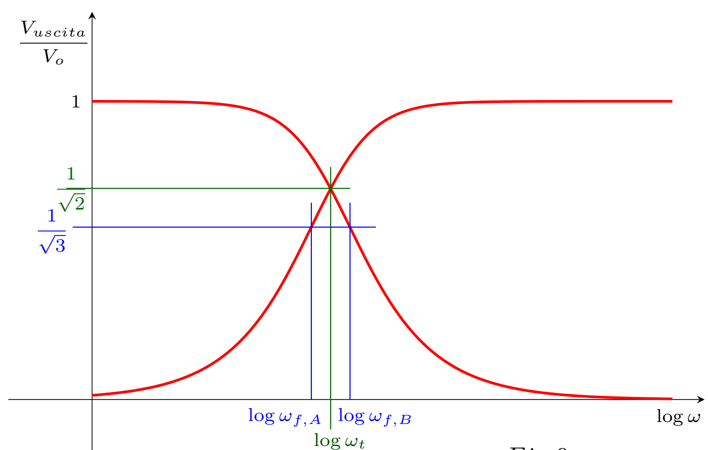
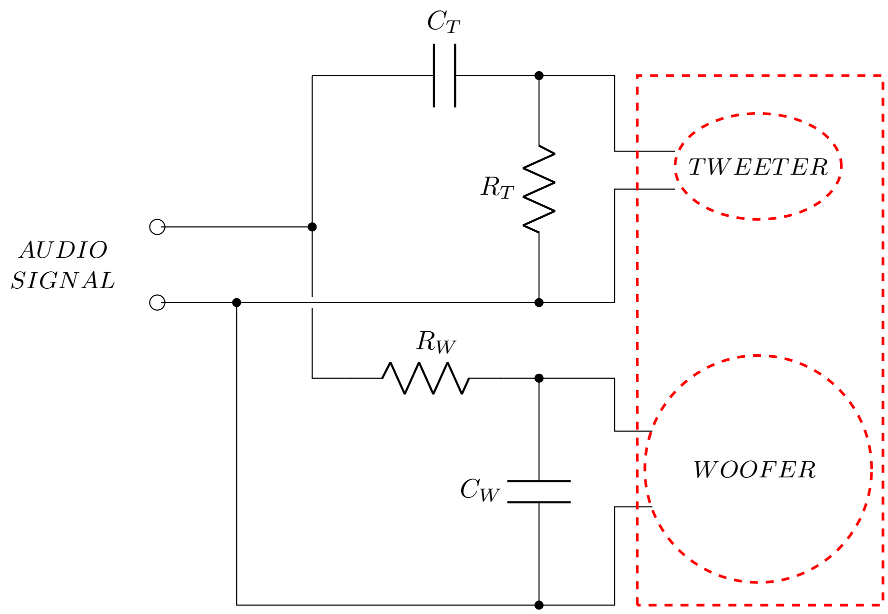


Fig.9

un'applicazione... CROSSOVER PASSIVO PER UNA CASSA ACUSTICA A DUE VIE

Il filtro passa alto indirizza le frequenze maggiori della frequenza di taglio al TWEETER, il filtro passa basso indirizza le frequenze minori della frequenza di taglio al WOOFER, lo schema in $Fig.10$



$Fig.10$