classe 4AL

IISS "L.B. ALBERTI" - Abano Terme (PD) a.s. 2020/2021

verifica scritta di MATEMATICA (11/2/21)

classe 4AL

SOLUZIONI

1. Studia le eventuali simmetrie, il CE ed il segno della seguente funzione; riporta i risultati in un grafico ("zebra"):

$$y = \frac{x \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} - 3\right]}{\log_{\frac{1}{2}}(5-x) + 3} \qquad [1]$$

scrivi inoltre i limiti che bisognerebbe calcolare per lo studio della [1]

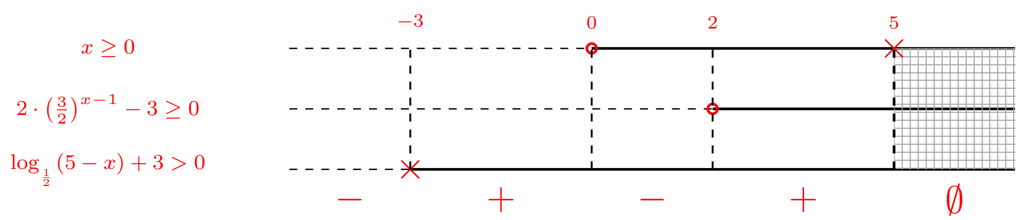
SIMMETRIE: $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ né pari né dispari

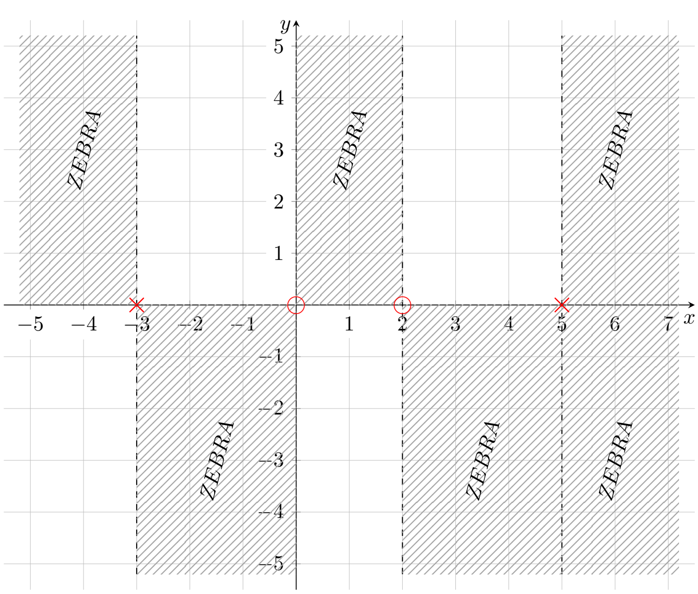
CE: $\begin{cases} 5 - x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(5-x) + 3 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5 \\ \log_{\frac{1}{2}}(5-x) \neq \log_{\frac{1}{2}} 8 \end{cases} \implies x < 5 \quad con\ x \neq -3$

SEGNO: $\dfrac{x \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} - 3\right]}{\log_{\frac{1}{2}}(5-x) + 3} \geq 0$

$x \geq 0 \qquad 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} - 3 \geq 0 \implies \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} \geq \frac{3}{2} \implies x \geq 2 \qquad \log_{\frac{1}{2}}(5-x) + 3 > 0 \implies \log_{\frac{1}{2}}(5-x) > \log_{\frac{1}{2}} 8 \implies x > -3$

prodotto dei segni dei fattori





$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 5^-} f(x)$$

2. Applicando la definizione generale, verifica i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^2-x-4}{x+1} = -7$ cambio di LUK $\lim_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(3x-4)}{x+1} = -7 \implies \lim_{x\to -1} (3x-4) = -7$

$$\begin{cases} 3x-4 < -7+\epsilon \\ 3x-4 > -7-\epsilon \end{cases} \implies \begin{cases} x < -1+\dfrac{\epsilon}{3} \\ x > -1-\dfrac{\epsilon}{3} \end{cases} \implies -1-\frac{\epsilon}{3} < x < -1+\frac{\epsilon}{3}$$

(b) $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+2}-x) = 0^+$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2}-x < \epsilon \\ \sqrt{x^2+2}-x > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{x^2+2} < x+\epsilon \\ \sqrt{x^2+2} > x \end{cases} \overset{caso\ x\geq 0}{\implies} \begin{cases} x^2+2 < x^2+2\epsilon x+\epsilon^2 \\ x^2+2 > x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x > \dfrac{1}{\epsilon}-\dfrac{\epsilon}{2} \\ \forall x \end{cases}$$

ponendo $M = \dfrac{1}{\epsilon}-\dfrac{\epsilon}{2} > 0$ (che impone $0 < \epsilon < \sqrt{2}$, accettabile) $\implies x > M$ il caso x<0 non necessita di studio

(c) $\lim_{x\to 2^-} \log_{\frac{1}{2}}(2-x) = +\infty$

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2-x) > M \\ 2-x > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2-x) > \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2^M} \\ x < 2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2-x < \dfrac{1}{2^M} = \epsilon \\ x < 2 \end{cases} \implies 2-\epsilon < x < 2$$

(d) $\lim_{x\to -\infty} 3^{\frac{1}{x+2}} = 1^-$

$$\begin{cases} 3^{\frac{1}{x+2}} < 1 \\ 3^{\frac{1}{x+2}} > 1-\epsilon \end{cases} \implies \begin{cases} 3^{\frac{1}{x+2}} < 3^0 \\ \log_3 3^{\frac{1}{x+2}} > \log_3(1-\epsilon) \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} > \log_3(1-\epsilon) \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} x < -2 \\ \dfrac{1-x\log_3(1-\epsilon)-2\log_3(1-\epsilon)}{x+2} > 0 \end{cases} \implies \text{con} \quad 0<\epsilon<1 \quad \begin{cases} x < -2 \\ x < \dfrac{1}{\log_3(1-\epsilon)}-2 \end{cases} \bigcup \quad x > -2$$

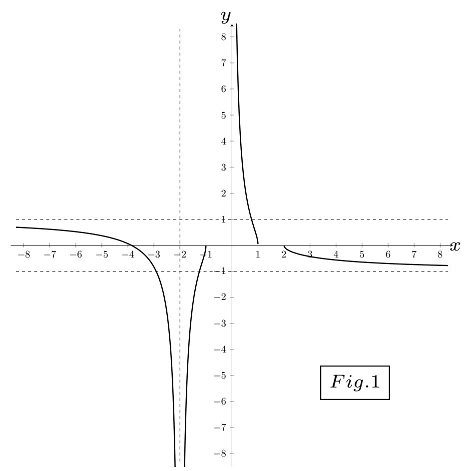
ponendo $-M = \dfrac{1}{\log_3(1-\epsilon)} - 2 << 0 \implies x < -M$

3. Indicando con $f(x)$ la funzione rappresentata in Fig.1, scrivi i limiti di $f(x)$ compatibili con il grafico

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1^-$ $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0^-$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0^+$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0^-$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -1^+$



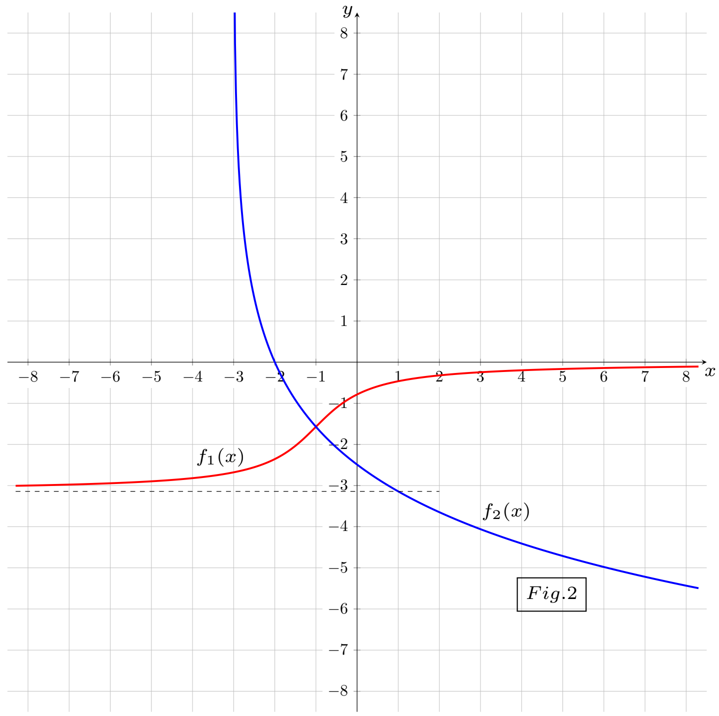
$Fig.1$

QUESY *(per alunni che non si pongono limiti)*

date le funzioni $f_1(x) = \text{atan}(x+1) - \dfrac{\pi}{2}$ ed $f_2(x) = \dfrac{\pi}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$

(a) verifica graficamente che l'equazione $f_1(x) = f_2(x)$ ammette la sola soluzione $x = -1$

(b) deduci dai grafici di $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ il $\displaystyle\lim_{x\to(-3)^+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$



$Fig.2$

considerando i grafici di $Fig.2$, dedotti da grafici elementari $\Longrightarrow$ una sola intersezione

(a) sostituendo $x = -1$ alle funzioni si ha $f_1(x) = \text{atan}(0) - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$ ed $f_2(x) = \dfrac{\pi}{2}\log_{\frac{1}{2}} 2 = -\dfrac{\pi}{2}$

(b) osservando i grafici $\displaystyle\lim_{x\to(-3)^+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(-3)}{+\infty} = 0^-$ $\quad (con \ -\pi < f_1(-3) < 0)$