PROBLEMA: un punto innamorato... ma tanto sfortunato

(scritto da un piccolo e sensibile scolaro della scuola primaria del Kazakistan)

SOLUZIONE

Una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB}$ ha il raggio dipendente dal tempo t secondo la legge oraria $r(t) = \sqrt{2}\,t$; all'istante $t = 0\,s$, un punto P, trattenuto da B, si libera da esso nel disperato tentativo di raggiungere il suo grande amore A, ed inizia il moto da B verso A lungo la semicirconferenza e secondo la legge oraria $\overset{\frown}{BP}(t) = \sqrt{2}\,t^2$. Si chiede di:

1. determina l'espressione analitica della funzione $y = A(t)$, dove $A(t)$ è l'area del triangolo AOP,

   ponendo $\theta(t) = P\hat{O}B$ ed indicando con H la proiezione di P sul diametro AB $\Longrightarrow$

   $$\theta(t) = \frac{\overset{\frown}{BP}(t)}{\sqrt{2}\,t} = \frac{\sqrt{2}\,t^2}{\sqrt{2}\,t} = t \implies A(t) = \frac{\overline{AO}\cdot\overline{PH}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,t\cdot\sqrt{2}\,t\sin t}{2} = t^2\sin t \qquad con \quad 0 \le t \le \pi$$

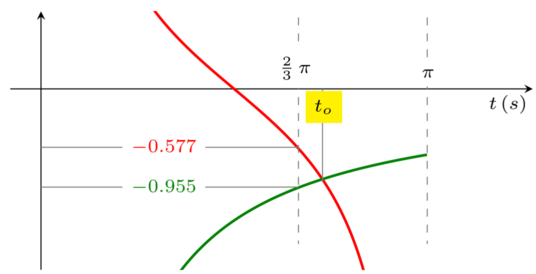
2. determina se il massimo valore di $y = A(t)$ si ha in corrispondenza dell'angolo $\alpha = P\hat{A}B$ maggiore o minore di $\frac{\pi}{3}$,

   $y' = 2t\sin t + t^2\cos t = t\sin t(2 + t\cot t)$, essendo $t\sin t \ge 0 \implies y' \ge 0 \implies 2 + t\cot t \ge 0 \implies \cot t \ge -\frac{2}{t}$

   con risoluzione grafica $\cot t \ge -\frac{2}{t} \implies$ figura accanto

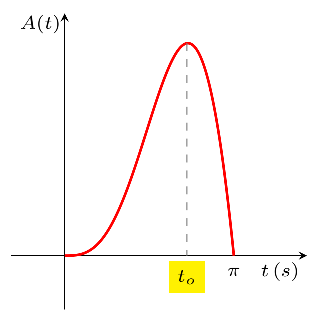
   $0 < t \le t_o \quad con \quad t_o > \frac{2}{3}\pi \implies Max \quad per\ t = t_o$

   essendo $\alpha = \frac{t}{2} \implies Max \quad per \quad \alpha = \frac{t_o}{2} > \frac{\pi}{3}$



3. studia e rappresenta $y = A(t)$ tenendo conto dei limiti geometrici ed evitando lo studio della derivata seconda,

   studio di fuzione... figura accanto



4. determina, con un minimo di fantasia matematica, una nuova legge oraria di P, $\overset{\frown}{BP}(t)$, che non sia lineare, affinchè l'amore di P per A sia "platonico e tendente all'oblio", corrispondente alla ben nota condizione $\lim_{t\to+\infty}\alpha(t) = \frac{\pi}{4}$, con $\alpha(t) = P\hat{A}B$.

   $$2\alpha = \frac{\overset{\frown}{BP}(t)}{\sqrt{2}t} \implies \alpha = \frac{\overset{\frown}{BP}(t)}{2\sqrt{2}t} \implies \text{una soluzione...} \qquad \overset{\frown}{BP}(t) = \frac{\pi}{4}\,2\sqrt{2}\,(t + e^{-t})$$

   verifica... $$\lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{4}\,\frac{2\sqrt{2}\,(t+e^{-t})}{2\sqrt{2}t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{4}\,\frac{2\sqrt{2}\,t\left(1+\frac{e^{-t}}{t}\right)}{2\sqrt{2}t} = \frac{\pi}{4}$$